4.4.24 Grafické řešení rovnic a jejich soustav

Předpoklady: 040423

Pedagogická poznámka: V této hodině kreslíme na čtverečkovaný papír tak, aby jeden čtvereček představovala vzdálenost 1.

Př. 1: Vyřeš graficky soustavu rovnic $\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{array}$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení:
Soustava má dvě rovnice, obě můžeme převést na lineární funkce.

- první rovnice $x+y=5 \Rightarrow$ funkce $y=5-x$,
- pravá strana: $2x-y=4 \Rightarrow$ funkce $y=2x-4$,

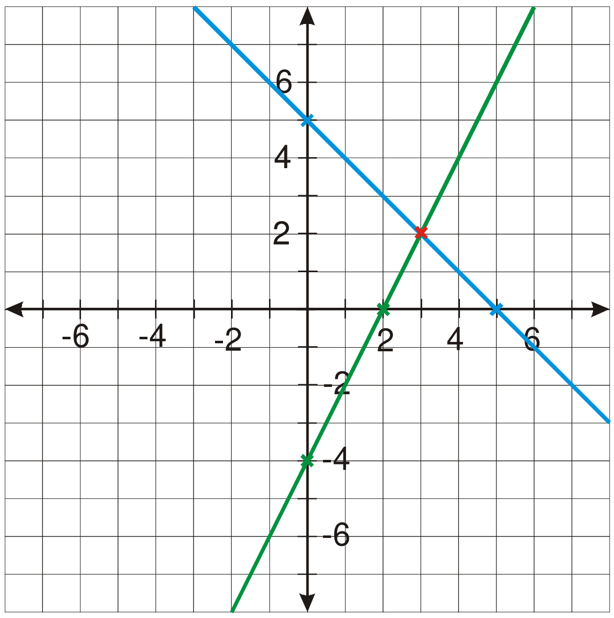
$\Rightarrow$ nakreslíme grafy funkcí $y=5-x$, $y=2x-4$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (v průsečíku mají obě funkce stejnou hodnotu obou proměnných – najdeme dvojici *x*, *y* která vyhovuje oběma rovnicím).

$y=5-x$

x	0	5
$y=5-x$	5	0

$y=2x-4$

x	0	2
$y=2x-4$	-4	0



Grafy se protínají v bodě $[3;2] \Rightarrow$ hledanou dvojicí čísel je $x=3$, $y=2$.

Početní řešení:

$$\begin{array}{l} x+y=5 \\ \underline{2x-y=4} \\ 3x=9 \quad /:3 \\ x=3 \\ y=5-x=5-3=2 \end{array} \qquad K=\{[3;2]\}$$

Př. 2: Vyřeš graficky soustavu rovnic $\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 2 \end{matrix}$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení:
Soustava má dvě rovnice, obě můžeme převést na lineární funkce.

- první rovnice $2x - y = 3 \Rightarrow$ funkce $y = 2x - 3$,
- pravá strana: $4x - 2y = 2 \Rightarrow$ funkce $2y = 4x - 2 \Rightarrow y = 2x - 1$,

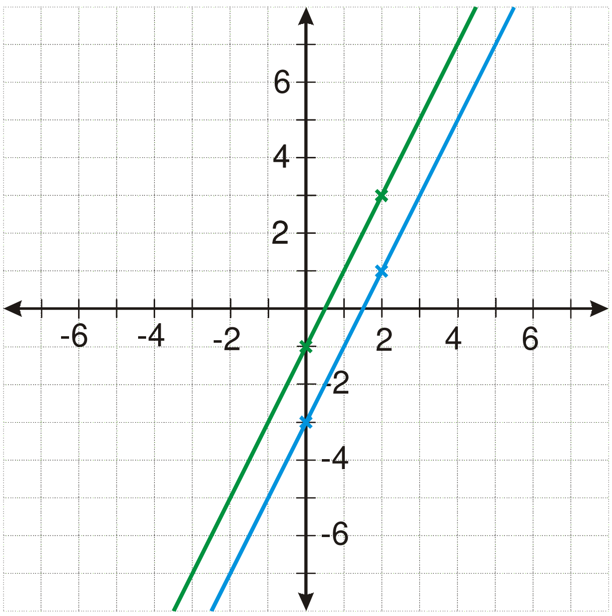
$\Rightarrow$ nakreslíme grafy funkcí $y = 2x - 3$, $y = 2x - 1$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (v průsečíku mají obě funkce stejnou hodnotu obou proměnných – najdeme dvojici *x*, *y* která vyhovuje oběma rovnicím).

$y = 2x - 3$

x	0	2
$y = 2x - 3$	-3	1

$y = 2x - 1$

x	0	2
$y = 2x - 1$	-1	3



Grafy jsou rovnoběžné přímky, které se nikdy neprotínají $\Rightarrow$ soustava rovnic nemá řešení.

Početní řešení:

$$\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 2 \qquad /:2 \\ \hline 2x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ \hline 0 \neq 2 \end{array} \qquad K = \emptyset$$

Př. 3: Soustavy dvou lineárních rovnic můžeme rozdělit podle počtu řešení na tři typy. V předchozích dvou příkladech jsme si ukázali grafické řešení dvou typů. Jaký je třetí typ? Napiš soustavu tohoto typu a vyřeš ji graficky. Ještě před grafickým řešením odhadni, jak bude vypadat.

Tři typy soustav dvou lineárních rovnic:

- jedno řešení: příklad 1,
- žádné řešení: příklad 2,
- nekonečně mnoho řešení: zatím bez příkladů.

Soustava s nekonečně mnoha řešeními obsahuje dvě rovnice, které jsou po úpravách stejné $\Rightarrow$ grafické řešení bude představovat dvojice stejných přímek (dvě stejné funkce se stejnými grafy).

Příklad: $$\begin{aligned} x-y&=2 \\ 2x-2y&=4 \end{aligned}$$

Grafické řešení:
Soustava má dvě rovnice, obě můžeme převést na lineární funkce.

- první rovnice $x-y=2 \Rightarrow$ funkce $y=x-2$,
- pravá strana: $2x-2y=4 \Rightarrow$ funkce $2y=2x-4 \Rightarrow y=x-2$,

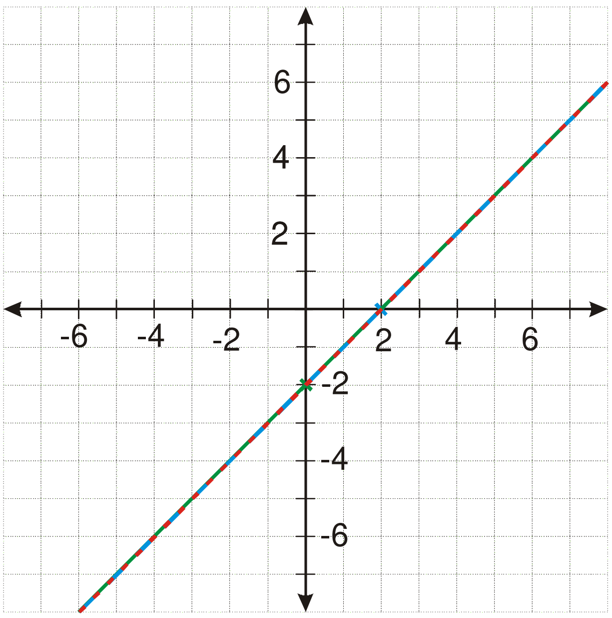
$\Rightarrow$ dvakrát kreslíme jednu a tu samou funkci $\Rightarrow$ všechny body této funkce jsou průsečíky a všechny představují řešení soustavy.

$y=x-2$

x	0	2
$y=x-2$	-2	0

$y=x-2$

x	0	2
$y=x-2$	-2	0



Grafy jsou totožné přímky, které se protínají ve všech bodech $\Rightarrow$ soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení $K=\{[x; x-2], x\in R\}$.

Početní řešení:

$$\begin{aligned} x-y&=2 \\ 2x-2y&=4 \quad /:2 \\ \hline x-y&=2 \\ x-y&=2 \\ \hline 0&=0 \end{aligned} \qquad K=\{[x; x-2], x\in R\}$$

Př. 4: Vyřeš graficky rovnici $x^2 = 2 - x$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení:

- levá strana x^2 $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2$,
- pravá strana: $2 - x$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = 2 - x$,

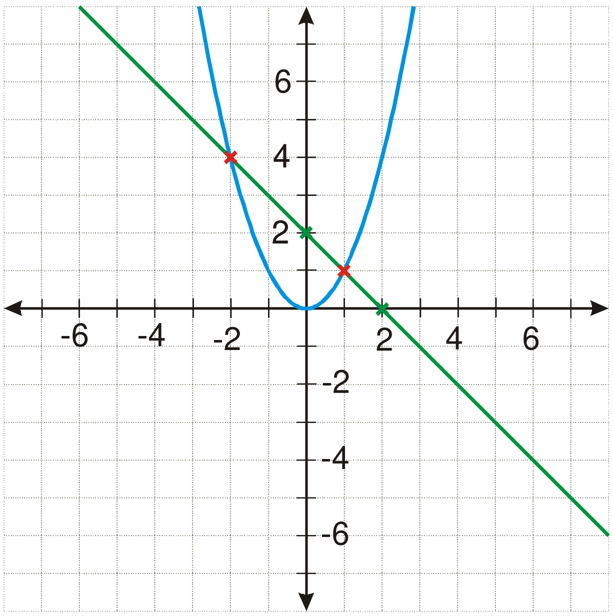
$\Rightarrow$ nakreslíme grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2 - x$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

$y = x^2$

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

$y = 2 - x$

x	0	2
$y = 2 - x$	2	0



Grafy se protínají v bodech $[-2; 4]$ a $[1; 1]$ $\Rightarrow$ rovnice má dvě řešení -2 a 1.

Početní řešení:

$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

$x_1 = -2$ $\qquad$ $x_2 = 1$ $\qquad$ $K = \{-2; 1\}$

Př. 5: Vyřeš graficky rovnici $x^2 - 2x - 3 = 0$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení:

Graf funkce $y = x^2 - 2x - 3$ nakreslit neumíme, ale můžeme rovnici upravit tak, aby na levé straně zůstal pouze člen x^2.

$x^2 = 2x + 3$

- levá strana x^2 $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2$,
- pravá strana: $2x + 3$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = 2x + 3$,

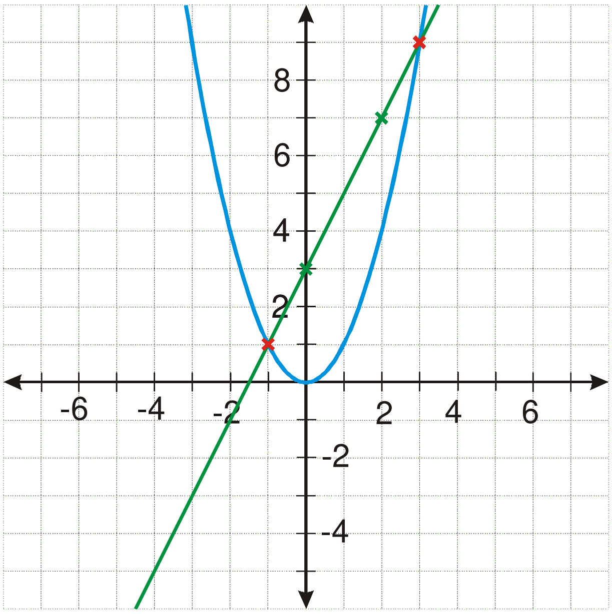
$\Rightarrow$ nakreslíme grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2x + 3$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

$y = x^2$

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

$y = 2x + 3$

x	0	2
$y = 2x + 3$	3	7



Grafy se protínají v bodech $[-1;1]$ a $[3;9]$ $\Rightarrow$ rovnice má dvě řešení -1 a 3.

Početní řešení:

$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

$x_1 = -1$ $\qquad$ $x_2 = 3$ $\qquad$ $K = \{-1; 3\}$

Př. 6: Vyřeš graficky rovnici $x^2 - 2x + 1 = 0$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení:

Graf funkce $x^2 - 2x + 1 = 0$ nakreslit neumíme, ale můžeme rovnici upravit tak, aby na levé straně zůstal pouze člen x^2.

$x^2 = 2x - 1$

- levá strana x^2 $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2$,
- pravá strana: $2x - 1$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = 2x - 1$,

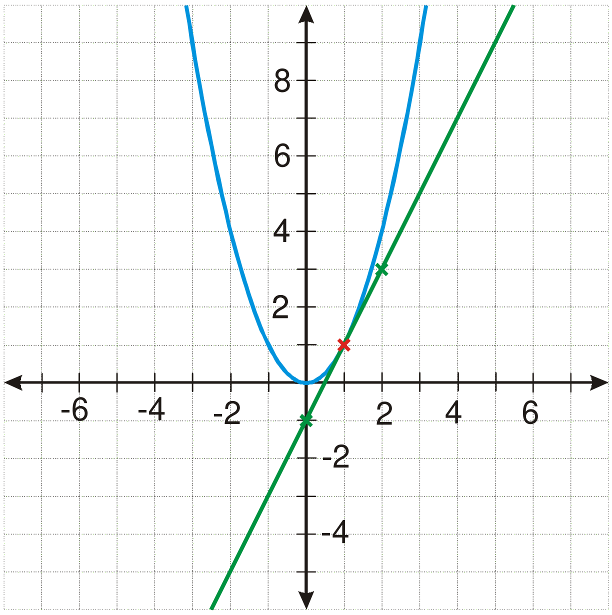
$\Rightarrow$ nakreslíme grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2x - 1$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

$y = x^2$

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

$y = 2x - 1$

x	0	2
$y = 2x - 1$	-1	3



Grafy se protínají v bodu $[1;1]$ $\Rightarrow$ rovnice má jedno řešení: $x=1$.

Početní řešení:

$x^2-2x+1=(x-1)(x-1)$

$x_1=x_2=1$ $\qquad K=\{1\}$

Př. 7: Vyřeš graficky rovnici $|x|=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Grafické řešení:

$|x|=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

- levá strana $|x|$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y=|x|$,
- pravá strana: $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,

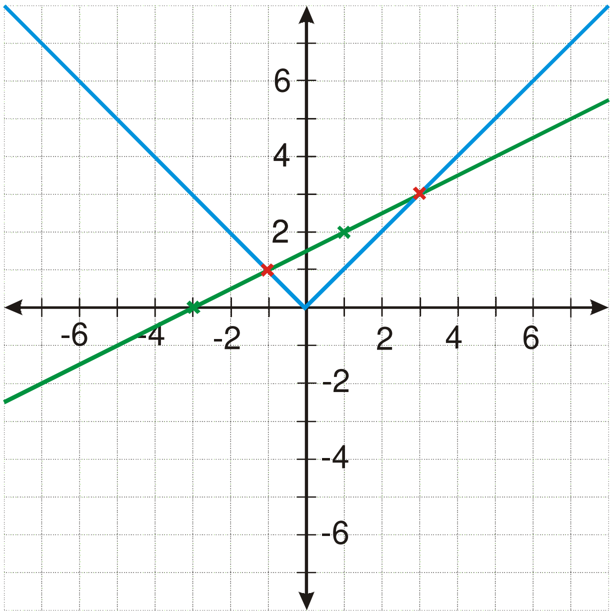
$\Rightarrow$ nakreslíme grafy funkcí $y=|x|$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ a hledáme místo, ve kterém se protnou (mají stejnou hodnotu).

$y=|x|$

x	-1	0	1
$y=\|x\|$	1	0	1

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

x	-3	1
$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	0	2



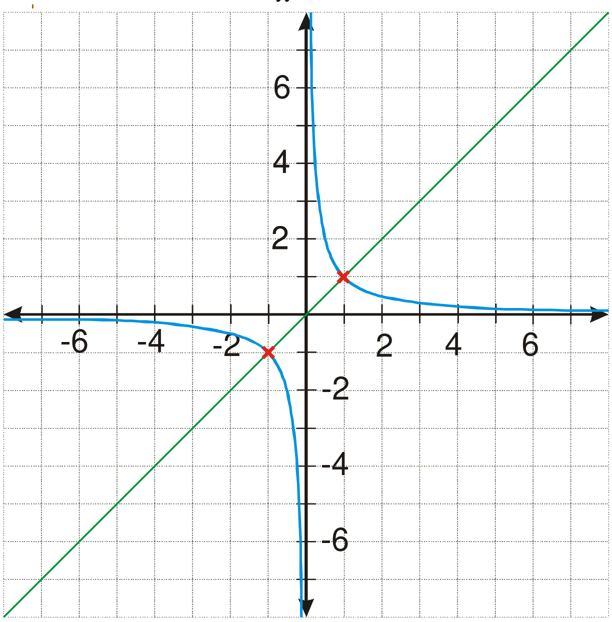
Grafy se protínají v bodech $[-1;1]$ a $[3;3]$ $\Rightarrow$ rovnice má dvě řešení -1 a 3.

$K = \{-1; 3\}$

Př. 8: Vyřeš graficky rovnici $x = \frac{1}{x}$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení: $x = \frac{1}{x}$

- levá strana x $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x$,
- pravá strana: $\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = \frac{1}{x}$,



Grafy se protínají v bodech $[-1;-1]$ a $[1;1]$ $\Rightarrow$ rovnice má dvě řešení: -1 a 1.

$K = \{-1; 1\}$

Početní řešení:

$$x = \frac{1}{x} \quad / \cdot x \qquad x \neq 0$$

$$x^2 = 1 \quad / -1$$

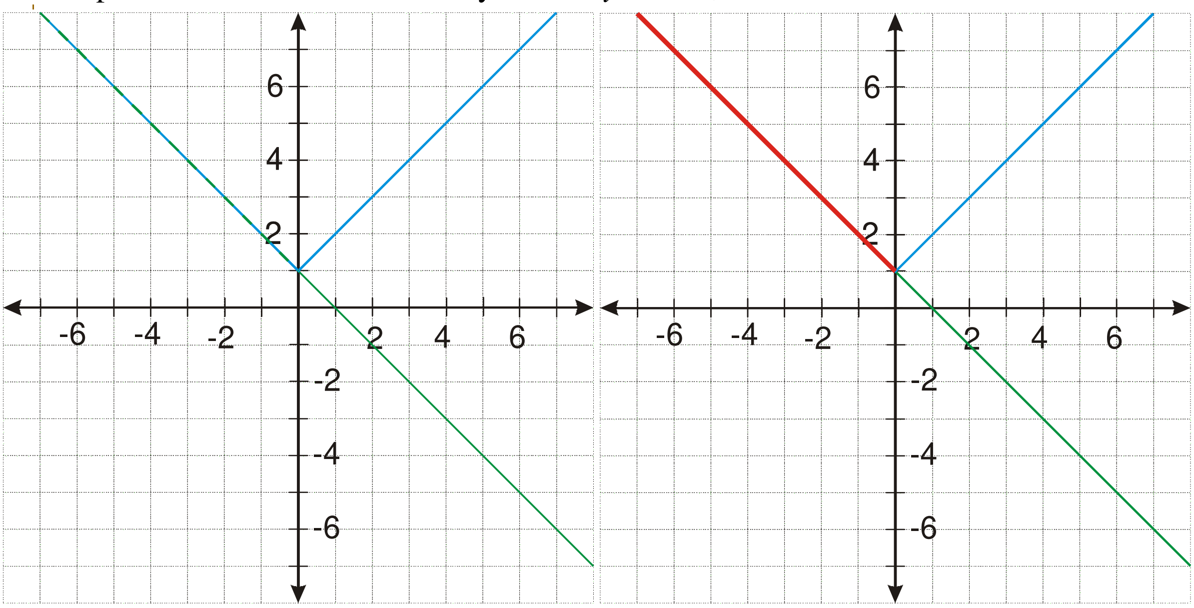
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$$

$$K = \{-1; 1\}$$

Př. 9: Vyřeš graficky rovnici $|x| + 1 = 1 - x$. Výsledek zkontroluj početně.

Grafické řešení: $|x| + 1 = 1 - x$

- levá strana $|x| + 1 \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = |x| + 1$ (funkce $y = |x|$ posunutá o 1 nahoru),
- pravá strana: $1 - x \Rightarrow$ hodnoty funkce $y = 1 - x$,



Grafy se protínají ve všech bodech, které mají nekladnou x-ovou souřadnici $\Rightarrow$ $K = (-\infty; 0\rangle$

Početní řešení:
Zkusíme se zbavit absolutní hodnoty pomocí její definice:

- $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x + 1 = 1 - x \quad / + x - 1$
  $0 = 0 \Rightarrow$ řešením jsou všechna čísla, pro které je možné použít náš způsob odstranění absolutní hodnoty (tedy nekladná čísla) $\Rightarrow K = (-\infty; 0\rangle$
- $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x + 1 = 1 - x \quad / + x - 1$
  $2x = 0$
  $x = 0 \Rightarrow K = \{0\}$

Dáme všechna řešení dohromady: $K = (-\infty; 0\rangle$

Shrnutí: Při grafickém řešení soustav lineárních rovnic nakreslíme každou rovnici jako lineární funkce. Společný průsečík pak určuje hodnoty obou neznámých.